環 $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ において、6 は

$$6 = 2 \cdot 3, \qquad 6 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$$

という 2 通りの既約元への分解をもつ。従って、$\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ における倍数の集合を考えると、

$$(6\text{ の倍数}) = (2\text{ の倍数})(3\text{ の倍数}), \qquad (6\text{ の倍数}) = (1 + \sqrt{-5}\text{ の倍数})(1 - \sqrt{-5}\text{ の倍数})$$

が成り立ち、イデアルの記号を用いると

$$(6) = (2)(3), \qquad (6) = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5}) \qquad ①$$

となる。① は単項イデアルの範囲ではこれ以上分解できない。一方、$\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ は一意分解整域ではないから単項イデアル整域ではない。よって、$\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ には単項イデアルではないイデアルが存在する。そのようなイデアルを用いると ① の 2 式は各々さらに分解される。

$$A = (2, 1 + \sqrt{-5}),\ B = (2, 1 - \sqrt{-5}),\ C = (3, 1 + \sqrt{-5}),\ D = (3, 1 - \sqrt{-5})$$

とする。

$$AB \subset (4, 2(1 - \sqrt{-5}), 2(1 + \sqrt{-5}), 6) \subset (2),\ CD \subset (9, 3(1 - \sqrt{-5}), 3(1 + \sqrt{-5}), 6) \subset (3)$$

であり、また、

$$2 = -2 \cdot 2 + (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5}) \in AB,\ 3 = 3 \cdot 3 - (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5}) \in CD$$

より $(2) \subset AB,\ (3) \subset CD$ であるから、

$$(2) = AB, \qquad (3) = CD$$

となる。従って、① の第 1 式から

$$(6) = ABCD \qquad ②$$

という分解が得られる。他方、

$$AC \subset (6, 2(1 + \sqrt{-5}), 3(1 + \sqrt{-5}), (1 + \sqrt{-5})^2) \subset (1 + \sqrt{-5}),$$
$$BD \subset (6, 2(1 - \sqrt{-5}), 3(1 - \sqrt{-5}), (1 - \sqrt{-5})^2) \subset (1 - \sqrt{-5})$$

であり、また、

$$1+\sqrt{-5} = -2(1+\sqrt{-5})+(1+\sqrt{-5})3 \in AC,\ 1-\sqrt{-5} = -2(1-\sqrt{-5})+(1-\sqrt{-5})3 \in BD$$

より $(1 + \sqrt{-5}) \subset AC,\ (1 - \sqrt{-5}) \subset BD$ であるから、

$$(1 + \sqrt{-5}) = AC, \qquad (1 - \sqrt{-5}) = BD$$

となる。従って、① の第 2 式から

$$(6) = ACBD \qquad ③$$

という分解が得られる。$\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ は可換環であるからイデアルの積も可換であり、② と ③ は同一の分解である。