可換環 R のイデアル I, J に対し,

$$I * J = \{ab \mid a \in I,\ b \in J\}$$

は, 一般には, R のイデアルではない.

例1. $R = \mathbb{Z}[X],\ I = (X, 3),\ J = (X, 2)$ とする. $3X, X \cdot 2 \in I * J$ だから $I * J$ が R のイデアルならば

$$X = 3X - X \cdot 2 \in I * J$$

である.

$$I = \{Xp(X) + 3q(X) \mid p(X), q(X) \in \mathbb{Z}[X]\} = \{XF(X) + 3a \mid F(X) \in \mathbb{Z}[X], a \in \mathbb{Z}\},$$
$$J = \{Xr(X) + 2s(X) \mid r(X), s(X) \in \mathbb{Z}[X]\} = \{XG(X) + 2b \mid G(X) \in \mathbb{Z}[X], b \in \mathbb{Z}\}$$

だから

$$X = (XF(X) + 3a)(XG(X) + 2b) \tag{1}$$

をみたす $F(X), G(X) \in \mathbb{Z}[X],\ a, b \in \mathbb{Z}$ が存在する. (1) の両辺の次数を比較して $F(X)G(X) = 0$. $F(X) = 0$ のとき (1) より $X/3 = a(XG(X) + 2b) \in \mathbb{Z}[X]$ となり矛盾. $G(X) = 0$ のとき (1) より $X/2 = b(XF(X) + 3a) \in \mathbb{Z}[X]$ となり矛盾.

例2. $R = \mathbb{R}[X, Y],\ I = (X + 1, Y),\ J = (X, Y)$ とする. $(X + 1)Y, YX \in I * J$ だから $I * J$ が R のイデアルならば

$$Y = (X + 1)Y - YX \in I * J$$

である.

$$\begin{aligned} I &= \{(X + 1)p(X, Y) + Yq(X, Y) \mid p(X, Y), q(X, Y) \in \mathbb{R}[X, Y]\} \\ &= \{(X + 1)a(X) + YF(X, Y) \mid a(X) \in \mathbb{R}[X], F(X, Y) \in \mathbb{R}[X, Y]\}, \\ J &= \{Xr(X, Y) + Ys(X, Y) \mid r(X, Y), s(X, Y) \in \mathbb{R}[X, Y]\} \\ &= \{Xb(X) + YG(X, Y) \mid b(X) \in \mathbb{R}[X], G(X, Y) \in \mathbb{R}[X, Y]\} \end{aligned}$$

だから

$$Y = ((X + 1)a(X) + YF(X, Y))\,(Xb(X) + YG(X, Y)) \tag{2}$$

をみたす $a(X), b(X) \in \mathbb{R}[X],\ F(X, Y), G(X, Y) \in \mathbb{R}[X, Y]$ が存在する. (2) の両辺の Y に関する次数を比較して $F(X, Y)G(X, Y) = 0$. $F(X, Y) = 0$ のとき (2) より $Y/(X + 1) = a(X)(Xb(X) + YG(X, Y)) \in \mathbb{R}[X, Y]$ となり矛盾. $G(X, Y) = 0$ のとき (2) より $Y/X = b(X)((X + 1)a(X) + YF(X, Y)) \in \mathbb{R}[X, Y]$ となり矛盾.